Desigualdade Triangular

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

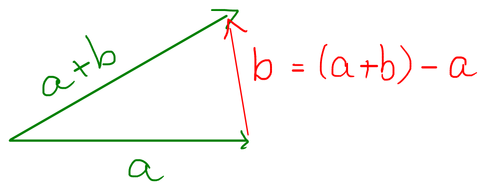
Esta desigualdade recebe o nome de desigualdade triangular.

O que ela tem a ver com a desigualdade triangular que aprendemos na educação básica?

A medida de um lado de um triângulo é menor ou igual à soma das medidas dos outros dois lados.

Podemos pensar da seguinte maneira:

Considere dois vetores no plano: a e $a+b$



Fazendo $(a+b) - a = b$ e tomando o triângulo como na figura acima, devemos ter

$$\underbrace{|a+b|}_{\text{medida de um dos lados do triângulo}} \leq \underbrace{|a| + |b|}_{\text{soma das medidas dos outros dois lados do triângulo.}}$$

Como demonstramos algebricamente?

Sabemos que

$$|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y \ , \text{ onde } x, y \in \mathbb{R} \, , \, y \geqslant 0 .$$

Então, para mostrar que $|a+b| \leq |a|+|b|$ é válido para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, devemos mostrar que

$$-(|a|+|b|) \leq |a+b| \leq |a|+|b|$$

(i) $|a+b| \leq |a|+|b|$

Como $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, p/ todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$(1) \quad x \leq |x|, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

e

$$(2) \quad -x \leq |x|, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Assim,

• se $a+b \geqslant 0$, temos:

$$|a+b| \underset{\text{pois } a+b \geqslant 0}{=} a+b \overset{(1)}{\leq} |a|+|b|$$

pois $\left.\begin{matrix} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b \leq |a|+|b|$

• se $a+b < 0$, temos

$$|a+b| \underset{\text{pois } a+b<0}{=} -(a+b) \overset{(2)}{\leq} |a|+|b|$$

pois $\left.\begin{matrix} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \end{matrix}\right\} \Rightarrow -(a+b) \leq |a|+|b|$

Em ambos os casos, temos

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

(ii) $-(|a|+|b|) \leq |a+b|$

Ora, temos

$$-(|a|+|b|) \leq 0 \leq |a+b|$$

$$\Rightarrow \quad -(|a|+|b|) \leq |a+b|$$

Por (i) e (ii) concluímos que

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

∎